第 42 卷 第 4 期
2024 年 12 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 42, No. 4
Dec., 2024

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2024.04.09

火卫二动力学模型与精密定轨研究

黄 凯[1,2]，张利军[1,2]，杨永章[1]，叶 茂[3]，李语强[1,4]

(1. 中国科学院 云南天文台，昆明 650216； 2. 中国科学院大学，北京 100049； 3. 武汉大学 测绘遥感信息工程国家重点实验室，武汉 430079； 4. 中国科学院 空间目标与碎片观测重点实验室，南京 210023)

摘要： 模型充分考虑了火卫二与火星的二体运动模型、火星重力场、太阳系主要天体的三体摄动、广义相对论效应、火星固体潮、火卫二天平动等影响火卫二运动的因素，建立了火卫二动力学模型，并将人造卫星精密定轨的方法扩展至自然天体火卫二，建立了针对动力学模型数据拟合的平差模型。分别利用轨道研究中主流的 8 阶 RKF (Runge-Kutta-Fehlberg)、12 阶 ABM (Adams-Bashforth-Moulton) 和 Gauss-Radau 三种积分算法求解火卫二轨道，比较计算效率，将轨道计算中使用的完整相对论模型与简化相对论模型的计算结果进行了对比。数值实验结果表明：建立的火卫二动力学模型以及平差模型稳定可靠；在同等实验条件下，三种积分算法计算结果精度相当，12 阶 ABM 积分算法的计算效率最高；两种相对论模型计算结果相当。

关 键 词： 火卫二；动力学模型；平差模型；数值积分；历表

中图分类号： P134 **文献标识码：** A

1 引 言

在太阳系中，火星系统与地月系统具有极为相似的特征。一方面，火星与地球拥有相近的自转周期和轨道倾角；另一方面，火卫和月球都处于中心天体的潮汐锁定状态。基于这些特征，对火星系统的研究有助于人类深入研究类地行星系统。因此，火星系统一直是人类深空探测的重要目标。

人类对火卫的认识始于美国海军天文台科学家 Asaph Hall 于 1877 年首次发现火星的两颗自然卫星，并分别命名为火卫一 (Phobos) 和火卫二 (Deimos)。Phobos 是两颗火星卫星中较大的一颗，研究人员对其轨道、重力场等多方面进行了深入的研究[1–3]。Deimos 是火

收稿日期： 2024-02-26； **修回日期：** 2024-05-24

资助项目： 中国科学院战略性先导科技专项 (XDA0350300)；国家自然科学基金 (12033009, 12103087)；国家重点研发计划 (YFA20210715101)；中国科学院国际伙伴计划项目 (020GJHZ2022034FN)；云南省基础研究专项 (202201AU070225, 202301AT070328, 202401AT070141)；云南省兴滇英才支持计划；云南省重点项目 (2019FA002)；云南省创新团队 (202005AE160056)

通讯作者： 杨永章，yang.yongzhang@ynao.ac.cn

星卫星中较小的一颗，研究结果表明，其位于高度为 23 458 km 的高轨上围绕火星转动。相较于火卫一，火卫二公开的研究较少，因此本文选取火卫二为重点研究目标。其基本物理参数如表 1[4] 所示。对火卫一和火卫二的探索研究不仅有助于人类更深入地了解类地行星系统的形成和演化，同时也为研究太阳系的形成与演化提供了重要线索。至今，研究人员已经多次向火星发射探测器并对火星的两颗卫星进行了大量的探测活动。在人类首次发现两颗火卫约 90 年后，人造卫星水手 4 号于 1965 年飞掠火星。随后，1969 年，水手 6 号、水手 7 号再次执行火星飞越任务，飞越了火星赤道和南极地区，但是，飞行器接近和飞越火星的图像并未被存档，因此没有关于火卫的数据。如果数据被保存下来，将延长人类飞行器对火卫观测的两年时间跨度，这对于火星卫星轨道的确定非常重要。1971 年第一颗火星环绕卫星水手 9 号发射，在近距离飞越火卫时获得了 214 幅 Phobos 和 Deimos 的灰度图像，这也是最早的由飞行器观测到的火卫数据。这些图像表明这两颗火星卫星的形状非常不规则，同时，对 Phobos 和 Deimos 的轨道速度的研究证实，Phobos 在向火星螺旋式下降时速度加快，而 Deimos 由于潮汐力而远离火星。20 世纪 70 年代末，苏联陆续向火星发射了两颗环绕卫星——维京 1 号和维京 2 号，这两艘航天器分别搭载了着陆器。着陆器在火星表面对 Phobos 和 Deimos 进行了观测。同时，维京计划在其延长的任务阶段将 Phobos 和 Deimos 的探索提升为一个重要的科学目标，并针对火星卫星进行了近距离的飞越。维京轨道器、着陆器数据集一直是关于火星卫星最详尽的数据，直到最近才被 ESA 的火星快车任务超越。目前，由 ESA 发射的火星快车任务获取了最多的火卫探测数据，其对认识火卫的轨道，以及火卫历表的研制等方面影响深远。Pathfinder 火星着陆器数据在火星自转与火星重力场研究中发挥了重要作用，其生成的重力场与自转模型 MRO120F 将在本研究中使用[5]。我国于 2020 年 7 月成功发射了首颗火星探测器“天问一号”，首次实现了对火星“环绕、着陆、巡视”的三步跨越[6]，其探测数据将用于开展火星内部质量分布和火星重力场等方面研究[7]。NASA 于 2006 年、2011 年、2016 年举办了三次关于 Phobos 和 Deimos 的科学和探测方案探讨的国际会议[8]。日本也制定了对火星和两颗火星卫星的探测方案[9]。

表 1 火卫二主要物理参数[4]

物理参数	$GM/(\mathrm{km}^3\cdot\mathrm{s}^{-2})$	C_{22}	J_2	R/km	A	B	C
数值	9.68×10^{-5}	4.773×10^{-2}	0.108	6.25	0.338	0.461	0.508

在地外天体的各种探测活动中，研究其运行轨道是一项重要的研究内容，对于了解天体内部结构、物理参数具有重要意义。在行星轨道计算方法方面，天体力学中可以使用解析法和数值法两种计算方式。随着深空探测的不断发展，尤其是观测数据的增加以及计算机算力的不断提升，数值法凭借其计算精度高、计算公式简单等特点逐渐取代了解析法，成为行星轨道计算中的主要方法。在此背景下，国际上多个机构基于已有的火星探测卫星轨道数据，发布了多个版本的火星卫星数值历表数据产品。目前主流的火卫历表数据产品包括 JPL 火星卫星历表 Mars097[1]、俄罗斯发布的 EPM (Ephemeris of Planets and the Moon) 系列[10]和法国发布的 NOE 系列历表[11]。

本文为建立我国自主研制的高精度火卫历表进行了初步探索：充分考虑影响火卫二运动的因素，建立了火卫二高精度动力学模型；用最小二乘法建立了数据拟合的平差模型。并对动力学模型数值求解的方法选择进行了探索研究。还对 8 阶 RKF (Runge-Kutta-Fehlberg)[12]、12 阶 ABM (Adams-Bashforth-Moulton)[13]和 Gauss-Radau[14]三种积分算法的计算效率进行对比，为火卫类型天体动力学方程求解的方法选择提供参考。

2　火卫二动力学模型的建立

与中心天体火星相比，火卫二的质量非常小。因此，在模型建立的过程中可将火卫二设为点质量。在进行行星自然卫星运动建模的过程中，其与中心天体的引力是其动力的主要来源，自然卫星主要在中心天体的引力控制下运动，其运动方程可表示为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + \boldsymbol{F} \quad , \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{r}$ 为天然卫星与中心天体的位置向量；r 为天然卫星与中心天体的距离；$\mu = G(M+m)$，G 为万有引力常量，M 与 m 分别为中心天体与天然卫星的质量；公式右边第一项为中心天体的引力；$\boldsymbol{F}$ 为其余摄动加速度的总和，主要包括中心天体的非球形摄动、太阳系主要天体的三体摄动、广义相对论效应等。J2000 历元时刻，各力模型的摄动量级（与中心天体火星对火卫二引力的比值）如表 2 所示。本研究旨在建立 ICRF (international terrestrial reference frame) 下高精度的火卫二动力学模型。

表 2　J2000 历元时刻主要摄动力摄动量级对比

摄动力模型	摄动量级（与火星引力的比值）
第三体摄动（太阳、地球、木、土星）	7.17×10^{-5}
火星重力场	5.65×10^{-6}
广义相对论效应	7.53×10^{-11}
固体潮	6.83×10^{-12}
天平动效应	4.26×10^{-8}

2.1　二体与三体模型

自然卫星主要在中心天体的引力控制下运动，如果忽略摄动力，只考虑中心天体的引力，运动方程可写为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad . \tag{2}$$

在天体力学中，该方程描述的运动称为二体问题。对于二体问题，可直接求解出其解析解。火卫二在运动时，除了受到中心天体火星的引力外，还会受到太阳系其他天体，如太阳、木星、土星和地球等的引力摄动，通常这类摄动称为第三体摄动。在太阳系质心参考系下，火星质心、火星到火卫二、摄动天体 j 的位置矢量分别是 $\boldsymbol{r_m}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r_j}$，在此惯性系中，

火卫二的加速度如下：

$$\boldsymbol{a}=-\frac{GM_{\text{mars}}}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\frac{GM_j}{\Delta_j^2}\frac{\boldsymbol{\Delta_j}}{\Delta_j}\quad , \tag{3}$$

$$\Delta_j=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_j}\quad . \tag{4}$$

式 (3) 描述了火卫二相对于太阳系质心的加速度，将此加速度转换到火星质心惯性系下：

$$\boldsymbol{a}=-\frac{GM_{\text{mars}}}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\ GM_j\left(\frac{\boldsymbol{r_j}}{{r_j}^3}+\frac{\boldsymbol{\Delta_j}}{\Delta_j^3}\right)\quad . \tag{5}$$

式 (5) 中第一项为火星与火卫二的二体加速度，摄动天体对火卫二产生的加速度为第二项。本模型中所使用的行星位置及主要物理参数来源于历表 DE430[15]，太阳系主要天体的引力常量如表 3 所示。

本研究分析了太阳系天体对火卫二引力的摄动量级，选取了其中摄动量级较大的几个天体（太阳、地球、木星、土星），并以 J2000 历元时刻为起点，计算一个火星轨道周期内 (687 d)，火卫二与这些天体的最近距离，计算结果如表 4 所示。再分别以各个摄动天体与火卫二距离最近时刻为积分起点，计算其引力对动力学模型的影响，结果如图 1 所示。结果表明，随着积分时长的增加，太阳系主要天体的影响不能忽视。

表 3 太阳系主要天体的引力常量[15]

天体	$GM/(\text{km}^3\cdot\text{s}^{-2})$
太阳	132 712 440 041.939 400
地球	398 600.435 436
火星	42 828.375 214
木星	126 712 764.800 000
土星	37 940 585.200 000

表 4 太阳系主要行星与火卫二的最近距离与时刻

天体	最近距离/km	时刻 (MJD)
太阳	206 656 499.713	52 195
地球	67 346 449.939	52 082
木星	525 974 687.590	51 625
土星	1 150 573 686.879	51 638

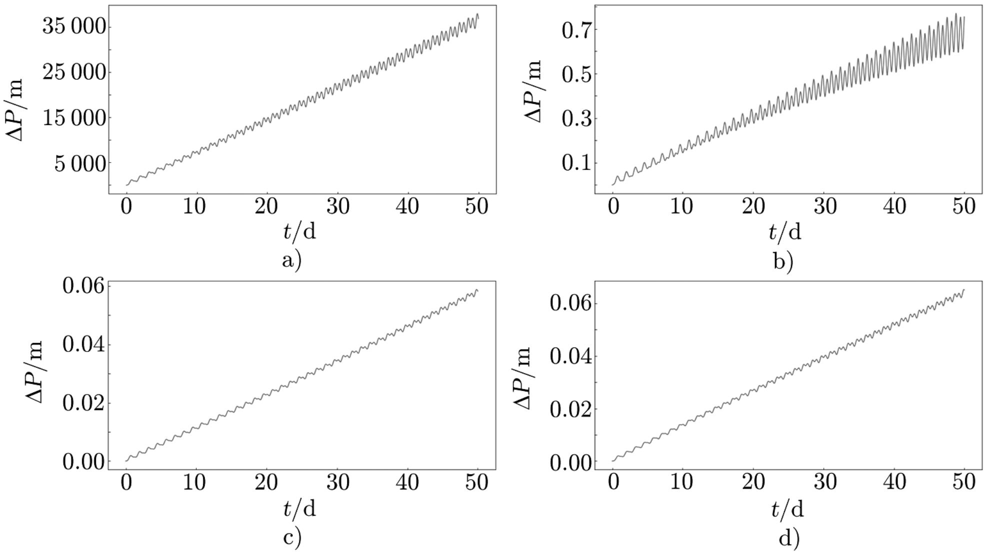
2.2 火星重力场摄动模型

由于火星的形状不规则，质量分布不均匀，因此在计算对火卫二的引力时不能被当做理想均匀球体，应当考虑非球形摄动。将引力位函数进行球谐函数展开得到[13]：

$$V=\frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_{\text{m}}}{r}\right)^n\bar{P}_{nm}(\sin L)\left[\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda\right]\quad , \tag{6}$$

其中，GM 是火星的引力常数，R_{m} 为火星的赤道半径，$\bar{P}_{nm}$ 是完全正规化的勒让德函数，$\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 是完全正规化后的火星重力场模型的球谐系数，λ、L、r 是火卫二在火星固定坐标系中的经纬度和到火星质心的距离。本研究所采用的模型主要为 Konopliv 通过 Pathfinder 着陆器数据生成的火星自转与火星重力场模型 MRO120F。在实际使用公式 (6) 时，需先将惯性系中的火卫二坐标转换到火星固定坐标系下，之后再由火星固定坐标系转换到惯性系中进行积分运算。转换方法为[5]：

$$\boldsymbol{R}_{\text{IN}}=R_Z(-N)R_X(-J)R_Z(-\psi)R_X(-I)R_Z(-\phi)\boldsymbol{R}_{\text{BF}}\quad , \tag{7}$$



注：a) 太阳引力的影响；b) 木星引力的影响；c) 土星引力的影响；d) 地球引力的影响。

图 1　太阳系主要天体对火卫二轨道的影响

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \tag{8}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{R}_{\rm IN}$ 和 $\boldsymbol{R}_{\rm BF}$ 分别表示惯性系和火星固定坐标系中的火卫二坐标，N 是春分点与 J2000 平均地球赤道平面 (Earth-mean-equator of J2000, EME2000) 和 J2000 平均火星赤道平面交点的夹角；J 是平均火星轨道平面相对于 EME2000 平面的倾角；ψ 是从 EME2000 和火星平均轨道平面交点与火星平均轨道平面和火星真赤道平面交点的角度；I 是火星真赤道相对于火星平均轨道平面的倾角；ϕ 是从火星平均轨道平面和火星真赤道的交点到火星本初子午线的角度。

2.3　相对论效应摄动模型

卫星在运动过程中受到广义相对论效应的影响。由于火卫二轨道的离心率非常小，可视为近圆轨道。此时，火星的广义相对论效应对火卫二产生的加速度为[16]：

$$\boldsymbol{a}_{\rm rel} = -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}\left(3\frac{v^2}{c^2}\right) \quad , \tag{10}$$

其中，GM 为火星的引力常量，v 为火卫二在火星惯性系下的速度，$\boldsymbol{r}$ 为火卫二到火星的位置矢量，c 为光速。此模型为相对论简化模型，其与相对论完整模型对比具有计算简单的特

点，是本文建立动力学模型所使用的相对论效应模型。简化模型与完整的相对论模型数据拟合的差异将在 3.2 节中讨论。以 J2000 历元时刻为积分起点，广义相对论效应对于轨道计算结果的影响如图 2 所示，结果表明，随着积分时间的增加，广义相对论效应引起的误差不能忽略。

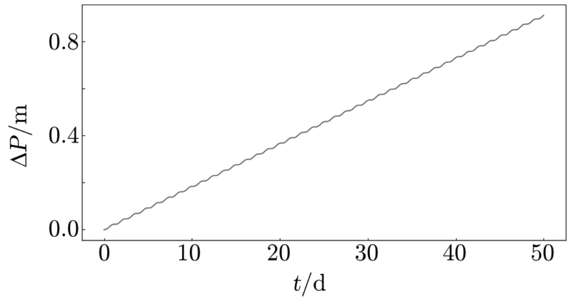


图 2 广义相对论效应对动力学模型的影响

2.4 固体潮摄动模型

由于受到太阳系其他天体引力的影响，火星引力场会发生变化，引力场的变化又会直接作用到火卫二上。因此，在火卫二动力学模型中需要考虑固体潮模型。对于某一质量为 M_j 的天体，在火星上产生固体潮，对火卫二的引力位函数为[17]：

$$V_{\text{tide}} = \frac{k_2}{2}\frac{GM_j}{|\boldsymbol{r}_{\text{jd}}|^3}\frac{R_m^5}{|\boldsymbol{r}|^3}\left[3\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{\text{jd}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)^2-1\right] \quad , \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{\text{jd}}$ 是摄动天体到火卫二的位置向量，$\boldsymbol{r}$ 为火星到火卫二的位置向量，R_m 表示火星的赤道半径，$\hat{\boldsymbol{r}}_{\text{jd}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 表示归一化的位置向量。火星 k_2 的值为 0.169[18]。本研究主要考虑了太阳以及火卫一引起的固体潮效应。如图 3 所示，以 J2000 历元时刻为积分起点，如积分时长为 50 d，固体潮模型对火卫二运动的影响最大值约为 0.3 m。随着积分时长的增加，此差异会进一步变大。因此，在建立火卫二高精度动力学模型时，火星固体潮效应不能忽视。

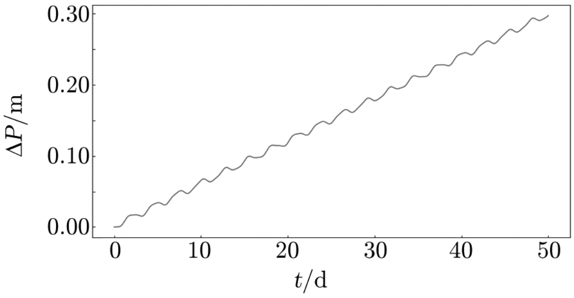


图 3 火星固体潮对动力学模型的影响

2.5 火卫二天平动模型

本文依据文献 [1] 关于卫星天平动的研究，在对火卫二动力学模型建模时加入了卫星的

天平动效应。天平动是对卫星运动在空间摆动的描述。根据卡西尼定则，处于潮汐锁定的卫星公转周期与自转周期一致。在理想情况下，火卫二总是同一面朝向火星，其最小惯量主轴总是指向火星质心，但由于火卫二在周围天体引力的综合作用下，其自转并不是均匀的，这种与均匀旋转的偏离被称为天平动。天平动效应作用在火卫二上产生的加速度可表示为[1]：

$$\boldsymbol{F} = -\frac{3}{2}\mu\left(\frac{R^2}{r^4}\right)\left[(J_2 + 6C_{22}\cos 2\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}} + 4C_{22}\sin 2\theta\hat{\boldsymbol{t}}\right] \quad , \tag{12}$$

$$\theta = f - M + \frac{2e}{1 - \dfrac{C}{3(B-A)}}\sin M \quad , \tag{13}$$

其中，μ 表示火星的引力常数，R 为火卫二的半径，r 表示火星到火卫二的距离，J_2 表示火卫二的二阶带谐系数，C_{22} 表示火卫二的二阶田谐系数，f 和 M 分别为火卫二轨道的真近点角和平近点角，e 为轨道的离心率，A、B、C 分别为火卫二的三个惯性主轴，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 表示火星到火卫二的单位向量，$\hat{\boldsymbol{t}}$ 为火卫二轨道平面内与 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 垂直且与火卫二运动速度同向的单位向量。

以 J2000 历元时刻为积分起点，时间跨度为 50 d，结果如图 4 所示。天平动效应可引起 300 m 左右的误差，因此，在建立火卫二动力学模型的过程中，必须考虑火卫二天平动效应。

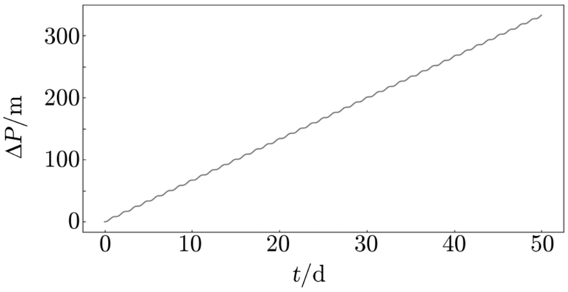


图 4　天平动效应对动力学模型的影响

2.6　模型结果

至此，我们考虑了影响火卫二运动的因素，建立了火卫二动力学模型。本节中，将动力学模型积分结果与 NASA 发布的 MARS097 火卫数值历表进行对比。需要说明的是，MARS097 历表中太阳系天体的位置来源与 DE421 历表、火星以及火卫的质量来自 Alex 等人的工作[19]。本研究中使用了与 MARS097 相同的火星和火卫二的质量，而太阳系天体的位置来源于新一代历表 DE430。

以 J2000 历元时刻 MARS097 历表中火卫二的位置、速度为积分初始状态量，对建立的动力学模型进行数值积分，计算结果与 MARS097 火卫数值历表进行对比，结果如图 5 所示。实验结果表明，时间跨度为 10 a 的模型计算结果与 MARS097 火卫数值历表的差异在 500 m。差别随着时间线性增长，这与积分过程中积分步长的选择等多方面的因素有关，

在进一步的研究中，使用观测数据对模型进行拟合以提高动力学模型计算结果的精度十分必要。

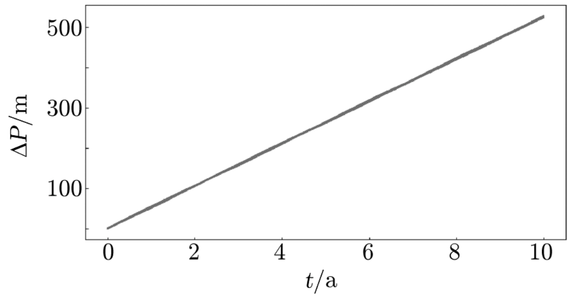


图 5　火卫二动力学模型积分结果与 MARS097 的差别

2.7　积分器的选择

轨道积分中，国际上常用的积分方法有单步积分 RKF (Runge-Kutta-Fehlberg)、多步积分 ABM (Adams-Bashforth-Moulton)、Gauss-Radau 等。为了研究不同的积分器对动力学模型积分时的精度和效率，以便为后续火卫数值历表的研究在积分器的选择中提供指导，我们分别选取这三种积分器对上节建立的火卫二动力学模型进行积分运算，以获取任意时刻火卫二的运动状态，对积分结果及计算效率进行比较分析，选择出最合适的积分器。

龙格-库塔法 (RK) 是对传统欧拉积分法的改进，并在很大程度上消除了由切割线斜率差别较大引起的积分误差。四阶的 RK 使用函数的 4 个斜率加权平均计算其增量函数，其计算精度与四阶的泰勒多项式相当，并且 RK 拥有不用求解高阶导数的优势，这使其在航天动力学方程十分复杂时得到了很好的应用。由于常规的 RK 误差控制比较复杂，Fienga 等人[11]提出了新的 RKF 算法对积分误差进行估计。在对精度要求更高的条件下，我们可以使用积分精度更高的 8 阶 RKF 算法，其基本原理与 4 阶 RKF 算法相同。

ABM 是常用的多步积分方法，通过储存之前的积分结果来尽量减少函数的计算次数。本研究根据动力学模型的精度需求，选择了精度更高的 12 阶 ABM 积分算法。其基本原理为：先由 12 阶 Adams-Bashforth 方法对函数进行积分运算，其增量函数由 12 个给定时刻的状态向量以及相应的积分系数确定，这 12 个初始状态向量一般可由四阶或者精度更高 RKF 积分方法得到。计算的结果再由 Adams-Moulton 方法进行预报与改正，在反复迭代的过程中提高计算结果的精度。在实际积分过程中，由于火卫动力学方程的复杂性，12 阶 ABM 多步积分方法相比单步积分 RKF 的积分效率会大大提高。此外我们还选取了多步积分 Gauss-Radau 算法作为对比，以 J2000 历元时刻为起点，并使用三种积分算法计算火卫二轨道结果的误差（如图 6 所示）。

三种积分器的计算效率及计算结果与 MARS097 历表的误差增长率如表 5 所示。结果显示对于火卫二动力学模型积分 50 d，三种积分算法的误差增长率相当，在本文所研究的时间尺度内，三种积分算法的计算精度都能满足。但在相同的积分步长下，12 阶 ABM 计算耗时约为 Gauss-Radau 的一半，为 RKF 算法的三分之一，计算效率最高。因此，在后续

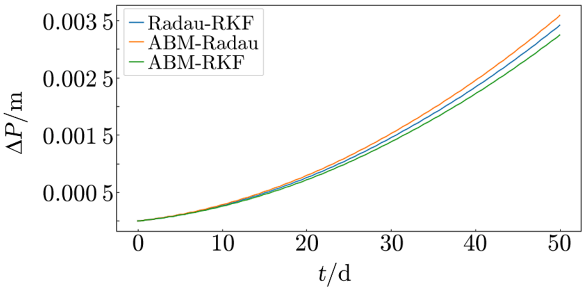


图 6　三种积分算法得到的火卫二轨道差别

火卫数值历表的研制中，推荐使用 12 阶 ABM 积分算法。

表 5　不同积分算法的计算效率和精度对比

积分算法	计算耗时/s	误差增长率/(m·d^{-1})
Adams-Bashforth-Moulton	55.99	0.159
Runge-Kutta-Fehlberg	186.14	0.159
Gauss-Radau	90.5	0.159

注：计算平台为 @cpu 3.4GHZ @anaconda python3。

3　平差模型

在第 2 章中，我们对影响火卫二运动的因素，即火卫二与火星的二体运动模型、火星重力场、太阳系主要天体的三体摄动、广义相对论效应、火星固体潮、火卫二天平动等进行建模，建立了火卫二动力学模型。本章中，将利用人造卫星精密定轨的方法，以美国历表 MARS097 中火卫的位置为观测数据，对火卫二动力学模型进行数据拟合。其基本原理为利用最小二乘法确定动力学模型的初始状态及参数，以最佳拟合观测数据。

3.1　变分方程

动力学模型中，火卫的加速度积分得到的轨道与初始历元时刻的状态矢量的关系可由状态转移矩阵 $\varPhi$ 描述，与动力学模型参数的关系由敏感矩阵 S 描述。状态转移矩阵与敏感矩阵的微分方程组合得到变分方程，其基本形式为：

$$\frac{\mathrm{d}(\varPhi, S)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{r}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{v}} \end{pmatrix}_{6\times6} \cdot (\varPhi, S) + \begin{pmatrix} 0_{3\times6} & 0_{3\times n_p} \\ 0_{3\times6} & \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial p} \end{pmatrix}_{6\times(6+n_p)} \quad . \tag{14}$$

对变分方程求解，可获得初始时刻火卫二的 6 个运动状态量。式 (14) 的求解需计算动力学模型中各摄动力对位置和速度的偏导数。对于二体问题，其加速度对位置的偏导数基本

形式为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{GM}{r^4}\begin{pmatrix} 3x^2-r^2 & 3xy & 3xy \\ 3yx & 3y^2-r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2-r^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{15}$$

火星重力场对位置的偏导数矩阵具有对称性，且对角线元素之和为零，此时矩阵的独立元素减少为 5 个。计算方法为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{r}}=\sum_{n,m}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{nm}}{\partial \boldsymbol{r}} \quad . \tag{16}$$

采用 Cunningham 推导的 n 次 m 阶表达式为：

$$\frac{\partial \ddot{x}_{nm}}{\partial x}=\begin{cases} \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(C_{n0}\ V_{n+2,2}-\dfrac{(n+2)!}{n!}\cdot C_{n0}\ V_{n+2,0}\right)\ , \quad (m=0) \\ \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\Big[C_{n1}\ V_{n+2,3}-S_{n1}\ W_{n+2,3}+ \\ \quad \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}\cdot(-3C_{n1}\ V_{n+2,1}-S_{n1}\ W_{n+2,1})\Big]\ , \ (m=1) \\ \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\Big[C_{nm}V_{n+2,\ m+2}-S_{nm}W_{n+2,\ m+2}+ \\ \quad 2\dfrac{(n-m+2)!}{(n-m)!}\cdot(-C_{nm}V_{n+2,\ m}-S_{nm}W_{n+2,\ m})+ \\ \quad \dfrac{(n-m+4)!}{(n-m)!}\cdot(C_{nm}V_{n+2,\ m-2}+S_{nm}W_{n+2,\ m-2})\Big]\ , \ (m>1) \end{cases} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \ddot{x}_{nm}}{\partial y}=\begin{cases} \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(C_{n0}\ W_{n+2,2})\ , \ (m=0) \\ \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\Big[C_{n1}\ W_{n+2,3}-S_{n1}\ V_{n+2,3}+ \\ \quad \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}\cdot(-C_{n1}\ W_{n+2,1}-S_{n1}\ W_{n+2,1})\Big]\ , \ (m=1) \\ \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\Big[C_{nm}V_{n+2,\ m+2}-S_{nm}W_{n+2,\ m+2}+ \\ \quad \dfrac{(n-m+4)!}{(n-m)!}\cdot(-C_{nm}W_{n+2,\ m-2}+S_{nm}V_{n+2,\ m-2})\Big]\ , \ (m>1) \end{cases} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \ddot{x}_{nm}}{\partial z}=\begin{cases} \dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(C_{n0}\ V_{n+2,1})\ , \ (m=0) \\ \dfrac{GM}{R^3}\cdot\Big[\dfrac{n-m+1}{2}\cdot(C_{nm}V_{n+2,\ m+1}+S_{nm}W_{n+2,\ m+1})+ \\ \quad \dfrac{(n-m+3)!}{2(n-m)!}\cdot(-C_{nm}V_{n+2,\ m-1}-S_{nm}W_{n+2,\ m-1})\Big]\ , \ (m>0) \end{cases} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \ddot{y}_{nm}}{\partial z}=\begin{cases}\dfrac{GM}{R^3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(C_{n0}\ W_{n+2,1})\ ,\ \ (m=0)\\[2ex] \dfrac{GM}{R^3}\cdot\Big[\dfrac{n-m+1}{2}\cdot(C_{nm}W_{n+2,\,m+1}-S_{nm}V_{n+2,\,m+1})+\\ \qquad\dfrac{(n-m+3)!}{2(n-m)!}\cdot(C_{nm}W_{n+2,\,m-1}-S_{nm}V_{n+2,\,m-1})\Big]\ ,\ \ (m>0)\end{cases}\tag{20}$$

$$\frac{\partial \ddot{z}_{nm}}{\partial z}=\frac{GM}{R^3}\cdot\frac{(n-m+3)!}{(n-m)!}\cdot(C_{nm}V_{n+2,\,m}+S_{nm}W_{n+2,\,m})\quad .\tag{21}$$

同时将模型的其余部分，即火卫与太阳引起的火星固体潮、广义相对论以及火卫天平动这三种摄动力引起的火卫二加速度对位置的偏导数求解。然后将其代入变分方程与状态矢量进行同步积分。最后利用最小二乘法拟合 MARS097 历表中的火卫二状态数据。以 J2000 历元时刻为起点，10 a 跨度的拟合结果如图 7、图 8 所示。

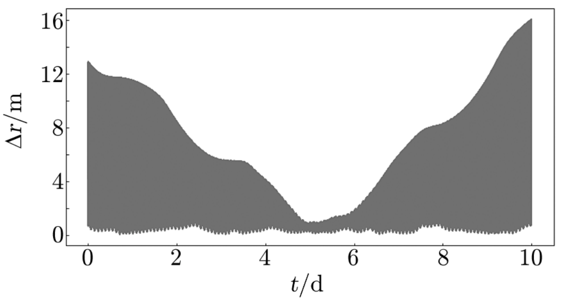


图 7　动力学模型精密定轨后与 MARS097 位置的对比

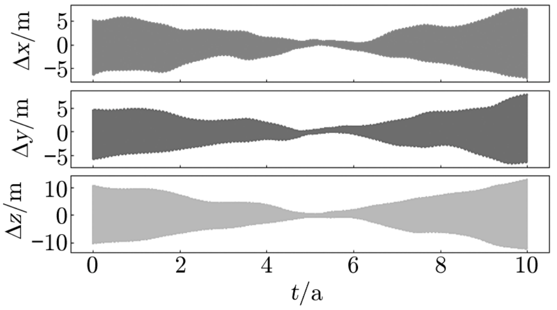


图 8　动力学模型精密定轨后与 MARS097 在 x、y、z 三个坐标轴方向的对比

拟合结果显示，在三个坐标轴方向的差别均低于 10 m，这些微小的差别可能来自于火星重力场模型的更新以及不同的动力学模型参数。目前主流的三种火卫数值历表间的差别已达到千米量级，而本文建立的动力学模型以及平差模型 10 a 跨度的积分结果与 MARS097 历表在三个坐标轴方向的差别维持在 10 m 以内，充分显示了本结果在工程上的可用性。

3.2　广义相对论模型分析

本研究中，由于火卫二轨道离心率很小，近似为圆轨道。此时，广义相对论效应对火卫二产生的加速度可使用简化公式 (10)。如果不做近似处理，火星的广义相对论效应对火卫二产生的加速度为[16]：

$$\boldsymbol{a}_{\rm rel}=-\frac{GM}{c^2r^3}\left[\left(4\frac{GM}{r}-\boldsymbol{v}^2\right)\boldsymbol{r}+4(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right]\quad ,\tag{22}$$

其中，GM 为火星的引力常量，r 为火星到火卫二的距离，$\boldsymbol{r}$ 为火卫二相对于火星的位置，$\boldsymbol{v}$ 为火卫二在火星惯性系下的速度。在计算过程中动力学模型根据积分时间与积分步长多次计算，因此，相较于简化公式 (10)，式 (22) 的计算耗时会增加。用完整相对论模型替换动

力学模型中的简化模型，并使用原动力学模型拟合 MARS097 历表后的轨道作为新模型的拟合数据；此方法可保证两个动力学模型中的参数一致，积分结果中仅体现两种相对论模型造成的差异。图 9 展示了用完整相对论动力学模型进行数据拟合的结果。

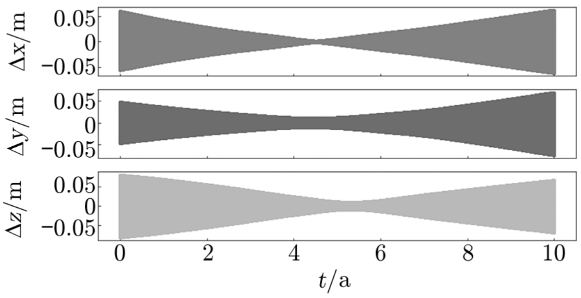


图 9　完整相对论模型与简化相对论模型的差别

以 J2000 历元时刻为积分起点，使用完整相对论动力学模型 10 a 跨度拟合观测数据的积分结果在三个坐标方向的影响约为 5 cm，此结果与简化相对论动力学模型结果的差异很小。因此，在实际计算火卫二轨道时，考虑计算效率可将其当作圆轨道处理。

4　总结与展望

本文分析了影响火卫二运动的主要因素，建立了火卫二动力学模型，并对模型中各摄动力的量级进行了分析。与 MARS097 火卫数值历表对比显示，本动力学模型 10 a 的积分结果与历表存在 500 m 左右的差异，并且差异线性增长。差别可能来自于不同的动力学模型参数，数值模拟结果充分证明动力学模型稳定可靠。

在进一步数据拟合的过程中，利用人造卫星精密定轨的方法，计算了各摄动力对火卫二运动状态偏导数的解析表达，建立了火卫二数据拟合的平差模型。拟合结果与 MARS097 历表的差别为 10 m，显示了该结果在工程上的可用性。

此外，在不同积分算法计算效率的研究过程中，我们使用 RKF 算法、12 阶 ABM、Gauss-Radau 算法对建立的模型进行积分。在积分精度相当的情况下，12 阶 ABM 算法耗时最短，是法国 NOE 历表采用的 Gauss-Radau 算法的一半，并且仅为 RKF 算法耗时的 1/3。此结论可为后续对于火卫类型的天体动力学方程积分求解及数值历表研制提供参考。最后，我们利用建立的模型数值模拟了完整与简化两种相对论模型数据计算结果。结果显示将火卫二视为圆轨道的简化模型与完整的相对论模型引起的差别约为 5 cm，两模型差异很小。因此，在考虑计算效率时可直接使用简化模型。

本研究中的动力学模型为现行历表中使用的模型，其并未像月球动力学模型中包含完整的自转。因此在后续研究中，考虑火卫自转进一步完善和发展动力学模型十分必要，本文相关结论和方法为后续工作奠定了基础。

参考文献：

[1] Jacobson R A. Astronomical Journal, 2010, 139(2): 668
[2] Lainey V, Dehant V, Pätzold M. Astronomy and Astrophysics, 2007, 465: 1075
[3] Burns J A. Reviews of Geophysics, 1972, 10(2): 309
[4] Rubincam D P, Chao B F, Thomas P C. Icarus, 1995, 114(1): 63
[5] Konopliv A S, Park R S, Folkner W M. Icarus, 2016, 274: 253
[6] 孙泽洲, 饶炜, 贾阳, 等. 空间控制技术与应用, 2021, 47(05): 9
[7] 耿言, 周继时, 李莎, 等. 深空探测学报, 2018, 5(5): 7
[8] Lee P. First International Conference on the Exploration of Phobos and Deimos. USA: NASA, 2009: 1
[9] Kuramoto K, Fujimoto M, Bibring J P, et al. Martian Moons eXploration MMX: Current Status Report. US: AGU, 2020: 12
[10] Pitjeva E V, Pitjev N P. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy: An international journal of space dynamics, 2014, 119(3/4): 237
[11] Fienga A, Deram P, Ruscio A D, et al. https://www.imcce.fr/recherche/equipes/asd/inpop/download21a, 2024
[12] Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control. USA: NASA, 1968: 1
[13] 李济生. 人造卫星精密轨道确定. 北京: 解放军出版社, 1995: 106
[14] Everhart E. An Efficient Integrator that Uses Gauss-radau Spacings. Netherlands: Springer, 1985: 1
[15] Folkner W M, Williams J G, Boggs D H, et al. Interplanetary Network Progress Report, 2009, 178: 31
[16] Beutler G. Methods of Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 2005: 69
[17] Goossens S, Matsumoto K. Geophysical Research Letters, 2008, 35(2): 168
[18] Konopliv A S, Park R S, Yuan D N, et al. Geophysical Research Letters, 2014, 41(5): 1452
[19] Alex S, Konopliv A, Charles F, et al. Icarus, 2006, 182(1): 23

Precision Orbit Determination for the Dynamics Model of Deimos

HUANG Kai[1,2], ZHANG Lijun[1,2], YANG Yongzhang[1], YE Mao[3], LI Yuqiang[1,4]

(1. Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, Kunming 650216, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 4. Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023, China

Abstract: This paper comprehensively considers factors influencing the motion of Deimos, such as the two-body motion model between Deimos and Mars, Mars' gravity field, the three-body perturbation from major celestial bodies in the solar system, general relativity effects, Martian solid tides, and the libration of Deimos. A dynamical model for Deimos is established, and the methodology of precise satellite orbit determination, originally de-

signed for artificial satellites, is extended to the natural satellite Deimos. Additionally, an adjustment model for fitting dynamic model data is developed. In the process of model establishment, this paper compares the computational efficiency of three mainstream integration algorithms in orbital research, namely the 8-order Runge-Kutta-Fehlberg (RKF), 12-order Adams-Bashforth-Moulton, and Gauss-Radau methods when solving Deimos' orbit. Simultaneously, a comparison is made between the results obtained using the complete general relativity model and a simplified relativistic model that treats Deimos' orbit as circular. Numerical experimental results indicate that the established dynamical model and adjustment model for Deimos are stable and reliable. Moreover, under equivalent experimental conditions, the computational accuracy of the three integration algorithms is comparable, with the 12th-order Adams-Bashforth-Moulton method demonstrating the highest computational efficiency. The results from both relativistic models are comparable, and the simplified model can be directly utilized when considering computational efficiency. This work lays the foundation for the subsequent development of a new dynamical model for Martian satellites, incorporating complete rotation, and the construction of accurate Deimos ephemerides.

Key words: deimos; dynamics model; adjustment model; numerical integration; ephemeris